Simulare, Bacalaureat, 18 mai 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate_info*

Filiera teoretică: profilul real, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătaţi că numărul complex $z=1-i$ este rădăcină a ecuației $z^4+z^2+2i+4=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+x+a,$ unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că parabola asociată acestei funcții are vârful pe dreapta de ecuație $y=1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg\left(x^2+x-2\right)=1+\lg\frac{x-1}{2}$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte, acesta să fie multiplu de 8.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$, $B(-1,3)$ și $C(8,10)$. Determinați ecuația dreptei paralele cu dreapta AC și care trece prin mijlocul segmentului CD, unde punctul D este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Calculaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $AB=2$ şi $\cos C=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+y+mz=4\\4x+y+mz=6\\x-my-z=-1\end{cases}$ și matricea $A(m)=\begin{pmatrix}2&1&m\\4&1&m\\1&-m&-1\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=2$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații verifică relația $\frac{y_0}{z_0}=x_0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție "$\circ$", $x\circ y=\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)^3$.

5p **a)** Arătați că legea "$\circ$" este asociativă.

5p **b)** Determinați numărul real x cu proprietatea că $7^3\circ x^3\circ\left(8x^3\right)=64$.

5p **c)** Arătați că $\frac{1^3\circ 2^3\circ 3^3\circ\ldots\circ 2021^3}{\left(1+2+3+\ldots+2021\right)^3}$ este număr întreg.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+1}{e^x}$.

5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-2x}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Arătaţi că $f(x)\le\frac{2}{\sqrt{e}}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{4}{3}$,
5p	**b)** Calculaţi $\int_{-1}^{1}\lvert xf(x)\rvert dx$.
5p	**c)** Calculaţi $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x t\cdot f(t)dt$.