

Simulare, Bacalaureat, 18 mai 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră a un număr real. Arătați că numărul $z = (2a + 3i)^2 + (2a - 3i)^2$ este real, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + a$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 3bx - 4$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b , știind că parabolele asociate celor două funcții au același vârf.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 2^{1-x} = 3$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{0, 1, 2, \dots, 11\}$, pătratul acestui număr să aparțină mulțimii A .
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3, 2)$ și $B(-1, -2)$. Determinați ecuația dreptei ce trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta AB .
- 5p** 6. Se consideră expresia $E(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + \sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 2$, unde x este număr real.
- 5p** Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2\ln a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in (0, +\infty)$.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(2021)) = 1$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(a) \cdot A(b) = A(ab)$, pentru orice $a, b \in (0, +\infty)$.
- 5p** c) Determinați $a \in (0, +\infty)$, astfel încât $A(a) \cdot A(a) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2022 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = x + y + 7xy$.
- 5p** a) Demonstrați că $x \circ y = 7\left(x + \frac{1}{7}\right)\left(y + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** b) Determinați numerele reale x , pentru care $x \circ x = \frac{8}{7}$.
- 5p** c) Calculați $\left(-\frac{2021}{14}\right) \circ \left(-\frac{2020}{14}\right) \circ \dots \circ \left(-\frac{2}{14}\right) \circ \left(-\frac{1}{14}\right)$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x$.

- 5p a) Arătați că $f'(x) = \sqrt{x} - 1, x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(1, -\frac{1}{3}\right)$.
- 5p c) Demonstrați că $x \cdot (2\sqrt{x} - 3) \geq -1$, pentru orice număr real $x, x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x}$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{e^x} dx = 1$.
- 5p b) Arătați că $\int_1^2 x^3 f(x^2) dx = \frac{e(e-1)(e^2 + e + 1)}{2}$
- 5p c) Demonstrați că $\int_1^e f(x) dx + \int_1^e e^x \ln x dx = e^e$.